REVISTA SAN GREGORIO
ISSN: 1390 - 7247 // e-ISSN: 2528 - 7907

Revista San Gregorio. 2025; 1:62
doi: 10.36097/rsan.v1i62.3561

ARTÍCULO DE REVISIÓN

Dualidad proceso objeto en la formación de conceptos matemáticos: Una revisión sistemática

Process-object duality in the formation of mathematical concepts: A systematic review

Olga Lidia Pérez González[1], Aura Estela Pujols Baez[2], Ana Mercedes Báez[2] y Rosario del Pilar Gibert Delgado[3]

[1]Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba
[2]Universidad Tecnológica del Sur, República Dominicana
[3]Instituto Politécnico Nacional, México

Citar como: Pérez, O., Pujols, A., Báez, A., y Gibert, R. (2025). Dualidad proceso objeto en la formación de conceptos matemáticos: Una revisión sistemática. *Revista San Gregorio*, 1(62),93-103. http://dx.doi.org/10.36097/rsan.v1i62.3561

Recibido: 20-02-2025 **Aceptado:** 29-05-2025 **Publicado:** 30-06-2025

RESUMEN
La formación de conceptos matemáticos requiere del conocimiento especializado del docente, para realizar interpretaciones y conexiones entre los conceptos objeto de estudio. El objetivo de la investigación es analizar la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos, a partir de los marcos teóricos que la sustentan y su aplicación didáctica en la práctica educativa. Se realizó una revisión sistemática utilizando el protocolo PRISMA de investigaciones realizadas entre 2019 y 2025. Los estudios analizados coinciden en que comprender los conceptos matemáticos implica integrar sus dimensiones operativas y estructurales, abordándolos tanto como procesos aplicados a objetos conocidos como objetos matemáticos en sí mismos. Se identificó un modelo teórico para la formación acumulativa de conceptos y se proponen dos acciones didácticas clave: la explicitación de recursos procedimentales y la argumentación sobre la distinción entre proceso y objeto. La reflexión sobre esta dualidad se presenta como una perspectiva teórica y metodológica fundamental, que favorece una comprensión profunda, flexible y significativa del conocimiento matemático.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas; modelos matemáticos; pensamiento lógico.

ABSTRACT
The formation of mathematical concepts requires the teacher's specialized knowledge to interpret and establish connections between the concepts under study. The objective of this research is to analyze the process-object duality in the formation of mathematical concepts, based on the theoretical frameworks that support it and its didactic application in educational practice. A systematic review was conducted following the PRISMA protocol, covering studies published between 2019 and 2025.The analyzed studies agree that understanding mathematical concepts involves integrating both operational and structural dimensions, approaching them as processes applied to known objects as well as mathematical objects in their own right. A theoretical model for the cumulative formation of concepts was identified, and two key didactic actions are proposed: the explicit activation of procedural resources and the use of argumentation to clarify the distinction between process and object. Reflection on this duality is presented as both a theoretical and methodological perspective essential to fostering a deep, flexible, and meaningful understanding of mathematical knowledge.

Keywords: Mathematics education; mathematical models; logical thinking.

INTRODUCCIÓN

La formación de conceptos matemáticos requiere del conocimiento didáctico especializado del docente (Pino-Fan et al., 2023; Sitora, 2024), como evidencia de su desempeño profesional para realizar interpretaciones y conexiones entre los conceptos objeto de estudio (Castro-Superfine et al., 2020; García-García & Dolores-Flores, 2021; Amador, 2022; Faila & Setiawan, 2025); sin embargo, la actual tendencia del trabajo por competencias en matemáticas tiende a limitar el desarrollo del pensamiento matemático.

La formación conceptual requiere del uso de herramientas didácticas que actúen como mediadores para el aprendizaje del estudiante como es el caso de los videojuegos (Sanz-Ramos et al., 2024), la articulación de la teoría-práctica, reflexión-valoración y objetividad-subjetividad como vía para llegar a la modelación matemática (Malheiros, 2024) y el trabajo didáctico-matemático con los diferentes tipos de conexiones matemáticas para conectar ideas, conceptos y procedimientos (Gamboa et al., 2021; Gamboa et al., 2023; Assemany, 2024).

Diversos autores han señalado que reflexionar sobre la dualidad objeto-proceso en la resolución de problemas matemáticos constituye una herramienta didáctica clave para la formación conceptual en matemáticas (Báez et al., 2022; Mateo & Pérez, 2024, Pérez, 2020; Rodríguez-Nieto et al., 2023). Sin embargo, Báez et al., (2017) demostraron que se utiliza poco en la práctica educativa, y que es una de las causas por la que los estudiantes tienen limitada efectividad en la resolución de problemas matemáticos.

Lo anterior se explica porque el concepto matemático está compuesto por dos dimensiones que deben tener una relación dialéctica para que favorezca la formación conceptual; la primera se denomina objeto estructural (objetos), y la segunda proceso operacional (procesos) (Pérez, 2020). Pero, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática lo operacional tiene predomino sobre lo objetal, y se hacen pocas acciones didácticas para reconocer la dualidad objeto-proceso (Báez et al., 2022; Shvarts et al., 2024)

Pérez (2020) señala que una de las causas de esas dificultades es que la dimensión operacional (procesos) antecede cronológicamente a la estructural (objetos), y que entre ellas hay una brecha ontológica que provoca una lenta formalización estructural, lo que constituye un obstáculo en la formación conceptual del estudiante.

Mateo & Pérez (2024) explicaron que en las secuencias didácticas que utilizan los docentes se parte de la formalización para después pasar a la dimensión operacional, lo que implica que, generalmente, la conceptualización se dé como un proceso fragmentado y discontinuo, pues el estudiante no logra distinguir y valorar entre lo operacional y lo estructural, pues el concepto en forma acabada no puede ser puesto en la mente del estudiante.

La transformación de un proceso inicial en un objeto matemático —que luego se incorpora a nuevos procesos junto a otros objetos— depende de los significados asociados a sus distintas representaciones y de la capacidad de los estudiantes para reconocer la dualidad entre lo estructural y lo operacional (Burgos et al., 2021; Godino, 2022). Los estudiantes que pueden aplicar exitosamente criterios operacionales y gráficos de conceptos matemáticos, fracasan en el manejo de criterios de simbolización formal o conceptual, lo mismo ocurre en el caso contrario, debido a la débil conexión entre procesos y conceptos (Pérez, 2020).

Para lograr que el estudiante sea efectivo en el reconocimiento de esta dualidad, es necesario realizar un proceso de reflexión orientado a la exploración valorativa de esa dualidad, a través de sus experiencias en la resolución de problemas matemáticos, explicitando en el proceso de resolución la disponibilidad de recursos procedimentales y argumentando la diferenciación entre proceso y objeto (Báez et al., 2022).

El objetivo del estudio es analizar la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos, a partir de los marcos teóricos que la sustentan y su aplicación didáctica en la práctica educativa. Esta perspectiva permite comprender cómo los estudiantes transitan desde una comprensión operativa, centrada en algoritmos y procedimientos, hacia una comprensión estructural, en la que los procesos son tratados como objetos matemáticos en sí mismos.

METODOLOGÍA

Se utilizó el protocolo PRISMA para la revisión sistemática (Sánchez-Serrano et al., 2022). Las preguntas de investigación que guiaron esta revisión sistemática fueron:

1. ¿Qué marcos teóricos explican la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos?
2. ¿Cómo debe abordarse el proceder didáctico para favorecer la reflexión sobre esta dualidad en el proceso de formación conceptual?

Criterios de elegibilidad

- Estudios realizados entre 2019 y 2025 en las bases de datos.
- Artículos originales, revisados por pares bajo el sistema de doble ciego.
- Publicaciones disponibles en texto completo.

- Idioma español o inglés.
- Pertinencia temática respecto a los objetivos de la revisión (dualidad proceso-objeto, formación de conceptos matemáticos, marcos teóricos y enfoques didácticos).

Se excluyeron archivos duplicados entre bases de datos, sin relación directa con la temática central, y notas de opinión.

Fuentes de información

La elección de las bases de datos Scopus, SciELO y Redalyc de incluir fuentes tanto de alto impacto académico (Scopus) como de pertinencia contextual y lingüística (SciELO y Redalyc), lo que asegura una revisión sistemática equilibrada, inclusiva y epistemológicamente representativa.

Estrategia de búsqueda

Se emplearon las siguientes combinaciones de términos en español e inglés:

a) *dualidad proceso-objeto* AND *formación de conceptos matemáticos*.

b) *formación de conceptos matemáticos* AND *didáctica de la matemática*

c) *dualidad proceso-objeto* AND *didáctica de la matemática*.

En el caso de Scopus, se limitaron los resultados a publicaciones clasificadas en el área temática 'Education', según el sistema ASJC (All Science Journal Classification) de la base de datos, empleando las palabras clave en inglés correspondientes a la investigación.

Proceso de selección de estudios

Los resultados iniciales arrojaron 1.272 publicaciones: 269 en Scopus, 486 en SciELO y 517 en Redalyc. Tras aplicar filtros temáticos y metodológicos, se seleccionaron 91 artículos (29 de Scopus, 50 de SciELO y 12 de Redalyc). En un primer cribado, se excluyeron 653 documentos por irrelevancia temática. En una segunda fase, tras el análisis de títulos, resúmenes y objetivos, se descartaron otros 120 estudios, quedando 47 artículos. Se sumó posteriormente un artículo reciente, lo que dio un total de 48 documentos seleccionados. Se definió una muestra final de 25 artículos pertinentes al tema de estudio, considerando que eran trabajos que ofrecían estrategias concretas, análisis de prácticas educativas o propuestas metodológicas orientadas a la enseñanza, en lugar de estudios meramente exploratorios o sin aplicación práctica clara.

Extracción de datos

Los registros seleccionados fueron importados al gestor bibliográfico Zotero, donde se llevaron los campos de autoría, año, país, nivel educativo y área temática.

Evaluación del riesgo de sesgo

Para valorar la calidad y posible sesgo de los artículos incluidos, se construyó una matriz basada en criterios adaptados del enfoque JBI (Critical Appraisal Checklist for Qualitative Research) para estudios cualitativos y teóricos. Cada artículo fue evaluado según la claridad de su objetivo, consistencia metodológica, transparencia analítica y relevancia didáctica. Esta evaluación permitió identificar estudios con alto rigor conceptual, así como detectar posibles limitaciones que podrían afectar la solidez de sus conclusiones. Fueron considerados al seleccionar los 9 artículos principales como referentes de la investigación. Los artículos seleccionados incluyen análisis, propuestas o experiencias educativas que son transferibles o adaptables a la práctica docente real, especialmente en niveles donde la transición de procesos a objetos es clave.

Síntesis de los resultados

Dado el carácter teórico y didáctico de los estudios seleccionados, se optó por una síntesis cualitativa de tipo narrativa o temática, adecuada para revisiones que no buscan cuantificar efectos, sino identificar, comparar y articular enfoques, categorías conceptuales y tendencias pedagógicas.

Diagrama de flujo PRISMA

Los resultados del proceso de selección se presentan en la figura 1, siguiendo el diagrama de flujo de PRISMA.

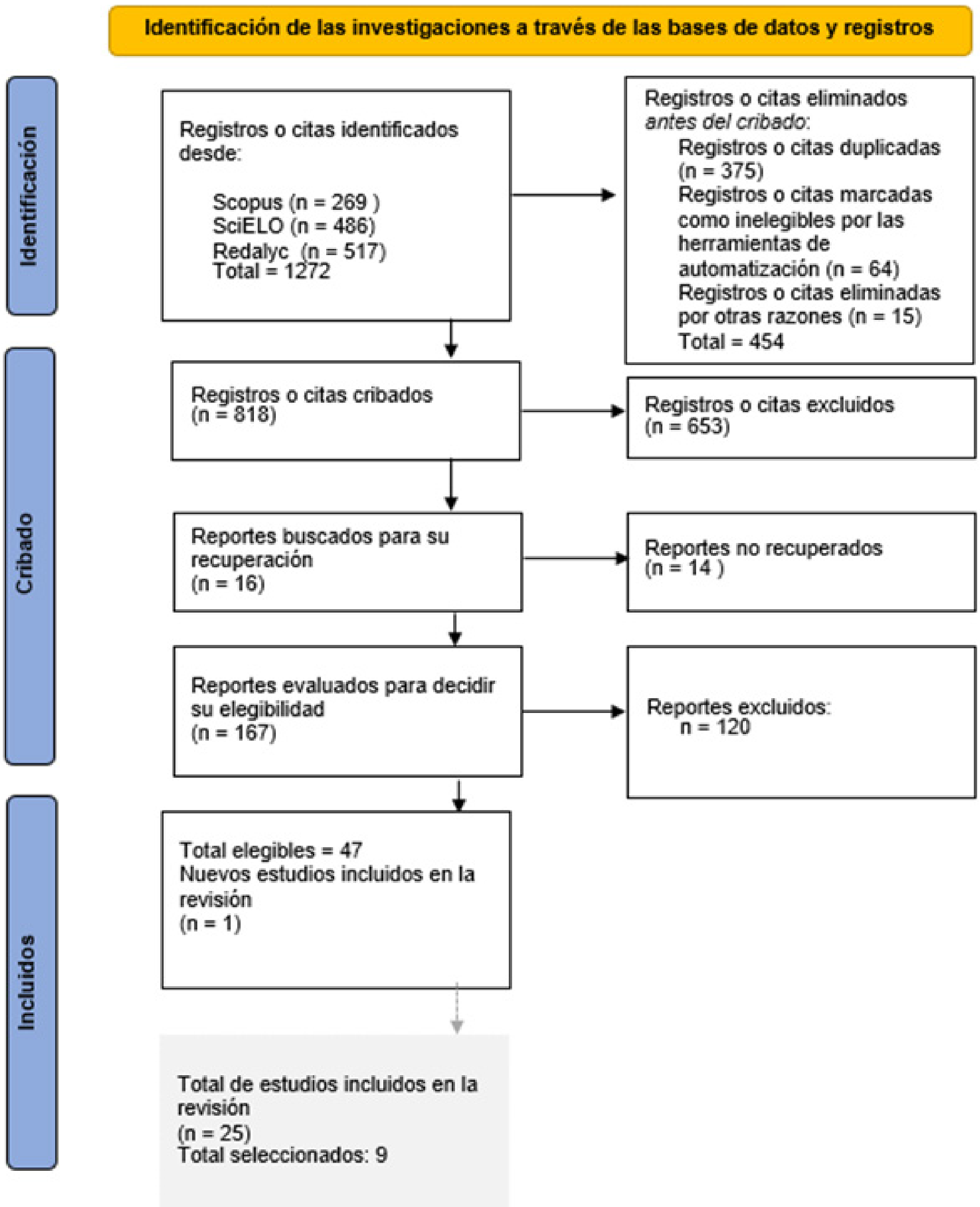

Figura 1. *Diagrama de fluyo de selección de estudios.*

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La tabla 1 resume las características generales de los estudios seleccionados, y se señalan aspectos descriptivos como autoría, temática abordada, nivel educativo y país de procedencia.

Tabla 1. *Investigaciones principales sobre dualidad proceso objeto, formación de conceptos matemáticos y didáctica de la Matemática.*

Autores	Temas	Nivel educativo	País
Báez et al. (2017)	Dualidad objeto proceso	Nivel Primario	República Dominicana
Báez-Ureña, (2018)	Dualidad objeto proceso	General	República Dominicana
Bueno et al. (2022)	Dualidad objeto proceso	Nivel Primario	Perú
Litteck et al. (2024)	Didáctica de la matemática, Dualidad objeto proceso	General	Alemania
Godino (2022)	Dualidad objeto proceso	General	España

Autores	Temas	Nivel educativo	País
Gutiérrez & Parraguez (2021)	Formación de conceptos matemáticos	Nivel Primario	Perú
Mateo & Pérez (2024)	Formación de conceptos matemáticos	Nivel Primario	República Dominicana
Quilantán & Rodríguez (2024)	Formación de conceptos matemáticos	General	México
Pérez (2020)	Dualidad objeto proceso	General	Cuba

Marcos teóricos explican la dualidad proceso objeto

Las investigaciones sobre la dualidad proceso-objeto se apoyan en tres marcos teóricos fundamentales (Litteck et al., 2024), los cuales comparten un hilo conductor: la idea de que el conocimiento matemático integra dos dimensiones complementarias, una operacional (el proceso) y otra estructural (el objeto). Desde esta perspectiva, comprender un concepto matemático implica reconocer tanto su aspecto procedimental como su forma estructurada. Así, un concepto puede ser abordado como un proceso aplicado a un objeto matemático previamente conocido, o bien como un objeto matemático en sí mismo, con identidad propia (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Gray & Tall, 1994).

La propuesta de Dubinsky (1991) se considera el primer marco teórico que incursionó en la temática y explica la formación de conceptos matemáticos a través de acciones, procesos, objetos que se organizan en esquemas que pueden ser encapsulados a un objeto mental, de modo que el estudiante tenga flexibilidad en para cambiar a diferentes significados contextuales del concepto (Litteck et al., 2024). Ese marco es utilizado en múltiples estudios que investigan sobre la formación y aprendizaje de conceptos matemáticos (Mateo & Pérez, 2024), se destaca la propuesta de Quilantán & Rodríguez (2024) que aborda el trabajo didáctico de los docentes con el concepto ecuación logística; y la de Gutiérrez & Parraguez (2021) quienes estudiaron las características del mecanismo mental de síntesis en el estudio del triángulo de Sierpinski.

La propuesta de Sfard (1991) constituyó el marco teórico que argumentó la formación del concepto matemático debe abordarse como operacional en la forma de un proceso y estructural en la forma de un objeto, eso requiere desarrollar tres procesos claves: interiorización, la condensación y la cosificación, los cuales hacen que el estudiante trabaje ideas matemáticas de forma operativa hasta comprenderlas como entidades abstractas y formales.

El proceso de interiorización se refiere a la asimilación de conceptos matemáticos a través de la práctica y la experiencia; donde interactúan con las ideas, las internalizan y las integran en su pensamiento; en el proceso de condensación los estudiantes reducen sus acciones operacionales o explicaciones y se vuelven más automáticos y condensan el concepto; y el proceso de cosificación para que el concepto se deje de ver como procesos y se conviertan en “objetos” matemáticos con propiedades y los rasgos que lo caracterizan (Sfard,1994).

Sfard (1991) argumenta que la formación de conceptos matemáticos implica un recorrido desde lo concreto y operativo (interiorización), pasando por una simplificación y eficiencia (condensación), hasta llegar a la abstracción y manipulación de entidades matemáticas (cosificación).

Por su parte, el marco teórico propuesto por Gray & Tall (1994), se denomina teoría proceptual para explicar la dualidad proceso-objeto; centra sus argumentos en que la formación conceptual se basa en la interacción entre procesos y conceptos, y en la capacidad de moverse flexiblemente entre estas dos perspectivas; sus conceptos claves son proceso, concepto; procepto y comprensión proceptual.

Báez et al. (2017) lo explicaron como el nexo conceptual-procedimental, donde el procepto es una entidad mental que puede ser interpretada tanto como un proceso (acción) como un objeto (concepto); por ejemplo, la expresión 2+3 como el proceso de sumar o como un objeto (el número 5); y la comprensión proceptual como la capacidad de valorar un concepto matemático de manera flexible, ya sea como un proceso o como un objeto, según sea necesario; de esa forma se puede afirmar que la reflexión flexible sobre la dualidad proceso-objeto es esencial para la formación conceptual, lo cual constituye el referente teórico de la presente investigación.

Por último, Litteck et al. (2024), con base a los marcos teóricos referidos anteriormente propuso un modelo teórico para la formación acumulativa de conceptos matemáticos, o la organización jerárquica de la formación conceptual. Dicho autor sugiere transitar de un concepto a otro, desde la comprensión operativa a la estructural, donde el conocimiento sobre un nuevo concepto se adquiera a través de una operación sobre un concepto ya conocido, luego ese conocimiento operacional se cosifica en estructural para posteriormente ser la base para el conocimiento operacional de un nuevo concepto. La propuesta de Litteck et al. (2024) se muestra en la figura 2:

Figura 2. *Propuesta de organización jerárquica de la formación conceptual.*
Fuente. Litteck et al. (2024)

En esa organización jerárquica, el autor acude a Sfard (1994) para explicar la posiblidad de que al trabajar un nuevo concepto el estudiante tenga un conocimiento pseudoestructural (sólo están presentes elementos fragmentados del conocimiento estructural del concepto). Eso sería la principal causa de las dificultades para comprenderlo, pues operará superficialmente con un concepto, y cometerá errores porque su conocimiento estructural no tiene nexos con el conocimiento operativo correspondiente, de ahí la importancia de reflexionar sobre su tratamiento didáctico.

Características del proceder didáctico que favorece la reflexión sobre la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos

La reflexión sobre la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos se debe concebir como un proceso de construcción reflexiva valorativa de los significados de los procesos como objetos, para movilizar y coordinar los saberes matemáticos previos, desde lo individual y lo social (Báez et al., 2017).

Su función es realizar la exploración valorativa de experiencias sobre la dualidad proceso-objeto para predecir y diseñar un plan de actividades que se orienten a la elicitación de los conceptos que subyacen en los diversos procesos que son objeto de análisis, y así identificar las dificultades y potencialidades respecto a los saberes previos del estudiante, y analizar la posible compatibilidad entre sus significados institucionales y personales de los diferentes conceptos abordados (Pérez, 2020; Godino, 2022). Esto se materializa si, por ejemplo, el estudiante al calcular el área de un triángulo equilátero (donde todos los lados son iguales a l) tiene que indagar por los diversos procesos matemáticos que conducen al mismo resultado: Área= $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Los procesos involucrados para el cálculo anterior son: utilizar la fórmula general del área (A=1/2* base* altura), la fórmula específica para triángulos equiláteros (A=$\frac{1}{2} * \ base * \ altura$), la fórmula específica para triángulos equiláteros ($A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$), uso de trigonometría (con el seno del ángulo), de la fórmula de Herón (usando el semiperímetro) o las coordenadas geométricas (usando vértices en el plano cartesiano).

La idea es que se realice una actividad reflexiva valorativa sobre los conceptos matemáticos de base, altura, propiedades de triángulos equiláteros, y del teorema de Pitágoras, para calcular la altura, funciones trigonométricas como el seno; manipulación de fórmulas y expresiones, y el uso de coordenadas y determinantes, como objetos del proceso de resolución del área de un triángulo equilátero.

Esa actividad es una herramienta interpretativa de los significados que se tienen de los objetos matemáticos, propicia cambios discursivos en la argumentación de los procesos; evita que los procesos realizados sean mecánicos y favorece la cimentación del significado de los procesos, la comunicación matemática de los análisis realizados, y la formación acumulativa de conceptos matemáticos, o la organización jerárquica de la formación conceptual.

En ese contexto, son dos las acciones que se deben realizar, la primera se orienta a la explicitación de la disponibilidad de recursos procedimentales para la ejecución de procesos en la resolución de problemas matemáticos, y la segunda a la argumentación valorativa de la diferencias entre proceso y objeto en la Matemática (Báez-Ureña, 2018).

El proceso de explicitación de la disponibilidad de recursos procedimentales, tiene una función analítica reflexiva para precisar el grado de interrelación entre los diferentes procesos aritméticos, algebraicos y/o geométricos, y sus formas de presentación para la comprensión del objeto matemático, y así propiciar el tránsito del proceso al objeto (Bueno et al., 2022).

Se concibe como el proceso a través del cual se desarrollan actividades para que el estudiante, con la ayuda del docente, otros estudiantes y los recursos mediacionales disponibles, identifique si los recursos que se disponen son aritméticos, algebraicos, geométricos y/o otros, según el tipo de datos presentados durante la resolución del problema matemático, a sus conocimiento previos, y otros que se promueven a través de las acciones reflexivas del docente, utilizando estas actividades como el espacio para el diagnóstico-nivelación de los estudiantes.

Por ejemplo, en el ejercicio de calcular el área de un triángulo equilátero donde todos los lados son iguales a l, identificar si los recursos que tienen los estudiantes son de Geometría elemental (Base, altura, propiedades de triángulos equiláteros), del Teorema de Pitágoras (para calcular la altura), de la Trigonometría (para el uso de funciones trigonométricas como el seno), del Álgebra (para la manipulación de fórmulas y expresiones) o de la Geometría analítica (para el uso de coordenadas y determinantes).

Para el logro de lo anterior, se deben debatir las diferentes variantes de los procesos, para promover el diálogo y debatir las diferentes nociones conceptuales que tiene el estudiante con respecto a los conceptos que subyacen en dichos procesos, con análisis reflexivo, de forma tal que los recursos conceptuales que se identifiquen se utilicen para significar los conceptos, y las relaciones en la distinción entre los procesos, y los objetos, y así gradualmente ir logrando su formación conceptual (Pérez, 2020).

Para lograr independencia en la distinción entre objeto y proceso, el problema a resolver generalmente no debe ofrecer suficientes bases de análisis para diferenciar los diversos procesos asociados al objeto matemático, por lo que el diseño de actividades debe propiciar el análisis reflexivo, previendo que, para alcanzar la generalidad de los procedimientos, es necesario recurrir a la reflexión abstracta sobre el contexto inicial (Gutiérrez & Parraguez, 2021).

Para que esto ocurra, el proceso debe desvincularse del contexto original y hacerse transferible a otros nuevos. De esta manera, el proceso generalizado adquiere una existencia autónoma a nivel intra e inter-psicológico, permitiendo su interpretación tanto en el original como en los nuevos donde se aplique, y dar paso a la comprensión del objeto asociado a dichos procedimientos (Van der Aalst, 2023; Mateo & Pérez, 2024).

Por ejemplo, un nuevo contexto sería la siguiente problemática: un ingeniero está diseñando un chip electrónico en el que una de las componentes tiene forma de triángulo equilátero. Esta componente es un resonador óptico que guía la luz en un patrón triangular para mejorar la eficiencia del chip. Cada lado del triángulo debe medir 2 micrómetros (μm). El ingeniero necesita calcular el área de este triángulo para determinar la cantidad de material necesario y optimizar el diseño.

En esa problemática se debe solicitar la solución del problema, por dos, o más maneras posibles, preguntar qué conceptos, o propiedades pueden usarse para resolverlo en cada una de las vías de solución abordadas, y debatir cómo esos objetos y procesos matemáticos son utilizados para el diseño de dispositivos nanofotónicos, donde las formas geométricas (como triángulos equiláteros) se utilizan para manipular la luz a escalas microscópicas; y que también es relevante en la fabricación de circuitos integrados, donde las formas geométricas deben ser precisas para garantizar el funcionamiento correcto de los componentes.

Báez et al. (2017) y Pérez (2020) precisaron que para lograr la significatividad lógica del nexo proceso-objeto se debe lograr en el análisis reflexivo la articulación de los saberes matemáticos en prácticas sociales en contextos profesionales, y así evidenciar la funcionalidad de los procesos y objetos matemáticos en diversos contextos.

En ese caso pueden reflexionar y valorar que saber el área exacta ayuda a determinar la cantidad de material necesario para fabricar el resonador óptico (optimizar el diseño), que el diseño preciso asegura que la luz se guíe correctamente dentro del chip, mejorando su rendimiento; y que favorece la reducción de los costos porque al calcular el área permite evitar el desperdicio de materiales costosos en la fabricación del chip (Malheiros, 2024).

De esta forma, la reconstrucción reflexiva y progresiva de procesos y conceptos, asociados a los recursos aritméticos, algebraicos, geométricos u otros, debe estar orientada a la búsqueda de un equilibrio en el uso y representación de esos recursos de modo que no se absolutice lo algebraico, lo geométrico y/o lo aritmético, entre otros.

En la segunda acción, la argumentación valorativa sobre la distinción entre proceso y objeto tiene una función de reflexiva regulativa, la cual se debe dirigir a la valoración del desarrollo de la actividad, y es el resultado de la interrelación de la actividad práctica y cognoscitiva, en base al establecimiento de diferencias y semejanzas de los diferentes procesos discutidos, y constituye el sostén para la independencia cognoscitiva en la asignación de significados a los procesos y conceptos abordados (Báez et al., 2017).

La argumentación valorativa debe desarrollarse analizando los diferentes procesos, a través de una reflexión metacognitiva, lo cual favorece la eficiencia y la efectividad del aprendizaje. Esto conlleva a la reflexión sobre los conocimientos que se tienen para la distinción entre proceso y objeto, lo que requiere del compromiso y esfuerzos para resolver los problemas planteados.

La regulación en la argumentación valorativa se logra a través del saber qué, cómo, cuándo se quiere conseguir, y en qué condiciones concretas se deben aplicar los recursos que se tienen para lograr ser efectivo en el reconocimiento de la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos (Quilantán & Rodríguez, 2024).

La argumentación requiere de la comprensión e interpretación de la información, razonar inductiva y deductivamente, propiciar el reconocimiento de contradicciones en la diferenciación entre objeto y proceso, la identificación de supuestos, juzgar la validez de conclusiones, la distinción entre lo observado y lo inferido, comparar, contrastar, defender argumentos y tomar decisiones.

La veracidad en la valoración supone que en el proceso de diferenciación se da la elaboración de verdades parciales, de culminaciones relativas, temporales, que en el desarrollo se van enriqueciendo progresivamente para contribuir a la efectividad en el reconocimiento de la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos, pues la valoración tiene un carácter inagotable que se fundamente en la naturaleza dinámica del desarrollo del proceso y del contexto (Pérez, 2020).

La valoración de la diferenciación entre proceso y objeto debe ser la actividad donde se aprende a establecer diferencias y semejanzas, de forma que se estimule la comparación de los diferentes procesos que se relacionan con un concepto determinado, así como con los procesos que relacionan diferentes conceptos, identificando diferencias y semejanzas, a partir de criterios preestablecidos, aportando información para la argumentación (Burgos et al., 2021). En esa valoración se deben develar las características esenciales de los procesos y/o conceptos para favorecer el tránsito a la generalización y al establecimiento de nexos entre los conceptos, procedimientos y los procesos lógicos del pensamiento (Mateo & Pérez, 2024).

Lo anterior presupone la necesidad de valorar el establecimiento, reconocimiento e identificación de diferencias entre procesos asociados a un mismo concepto, la semejanza y lo común entre procesos. Es así como en el establecimiento de las diferencias que existen entre funciones definidas por una misma regla en conjuntos distintos, se reconoce que son semejantes los procesos para calcular los ceros de cualquier función (Hatisaru, 2023).

Desde esa valoración de la diferenciación entre proceso y objeto, se debe propiciar el trabajo independiente, de forma que la valoración conduzca a la actividad de aprender a buscar los argumentos de dicha diferenciación, investigando el porqué de las diferencias o sus causas, el para qué se requiere o es de utilidad valorarlas (Báez-Ureña et al., 2018).

Lo anterior debe propiciar la discusión colectiva del proceso de solucionar los problemas matemáticos, y la reflexión sobre el modo en que fueron resueltos, realizando el análisis de las diversas posibles soluciones, utilizando todos los recursos disponibles, valorar si los resultados satisfacen las exigencias, valorar sobre las razones de la validez de una conjetura, demostrar proposiciones o valorar la validez de una cadena de argumentos (Rodríguez-Nieto et al., 2022; Hatisaru et al., 2024).

La valoración incluye las causas de los errores más frecuentes y los particulares, la posibilidad de transferencia de los procesos y objetos a otros contextos, y la socialización de los modos de valoración utilizados, evitando ser absolutos en los procesos, la imposición de procesos sin argumentos, así como el predominio de unos procesos frente a otros (Báez et al., 2022).

Del análisis anterior, se devela que entre las dos acciones propuestas se instituyen relaciones de coordinación y resultan en la cualidad efectividad en el reconocimiento de dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos, como muestra la figura 3, la cual indica que el proceso hace que se logre racionalidad, fluidez y economía en la distinción entre proceso y objeto al resolver problemas matemáticos, identificando la disponibilidad de recursos procedimentales, movilizando, evaluando y diferenciando, los conceptos y procedimientos.

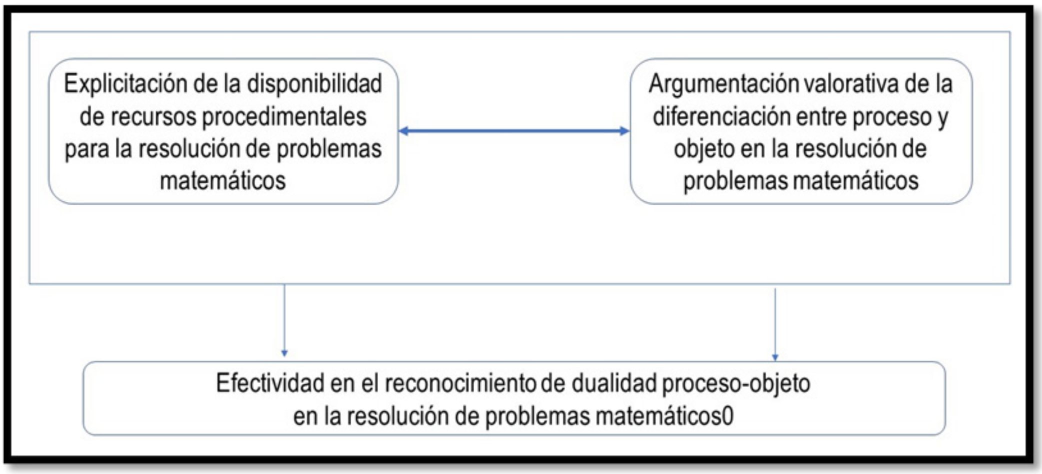

Figura 3. *Proceder didáctico para favorecer la reflexión sobre la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos,*

A modo de síntesis de los expuesto en el desarrollo de la revisión sistemática, se hizo una comparación de la lógica e intención didáctica de la formación conceptual, según los autores estudiados, con respecto a la nueva propuesta que se hace en el artículo, la cual se muestra en la tabla 2, lo que permitió concluir que la esencia de todas las propuestas está en el análisis de la dualidad proceso objeto en la formación de conceptos matemáticos.

Tabla 2. *Comparación de las diversas propuestas sobre la lógica e intención didáctica de la formación conceptual.*

Autores	Lógica didáctica de la formación de conceptos	Intención Didáctica
Dubinsky (1991)	Se construyen acciones, procesos y objetos matemáticos, y se organizan en esquemas. Los mecanismos de las construcciones se concretan en cinco tipos de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.	Construcción de conceptos matemáticos basado en la abstracción reflexiva
Sfard (1991)	Se hace un recorrido desde lo concreto y operativo (interiorización) del concepto, pasando por una simplificación y eficiencia (condensación), hasta llegar a la abstracción y manipulación de entidades matemáticas (cosificación).	Trabajar las ideas matemáticas de forma operativa hasta comprenderlas como entidades abstractas y formales.
Gray & Tall (1994)	Se hace la interacción entre procesos y conceptos, y en la capacidad de moverse flexiblemente entre estas dos perspectivas; sus conceptos claves son proceso, concepto; procepto y comprensión proceptual	Reflexionar sobre la dualidad proceso-objeto.
Litteck et al. (2024)	Se transita de un concepto a otro, desde la comprensión operativa a la estructural, de modo que el nuevo conocimiento operacional se cosifica en estructural para posteriormente ser la base para el conocimiento operacional de un nuevo concepto.	Formación acumulativa de conceptos matemáticos, y su organización gerárquica.
Propuesta de los autores de la investigación	Se realizan acciones de coordinación entre el proceso de explicitación de la disponibilidad de recursos procedimentales para resolver problemas matemáticos, y el proceso de argumentación valorativa de la diferenciación entre proceso y objeto.	Favorecer la efectividad en el reconocimiento de dualidad proceso-objeto en la resolución de problemas matemáticos.

CONCLUSIONES

El análisis de la dualidad proceso-objeto en la formación de conceptos matemáticos, sustentado en diversos marcos teóricos, evidencia su relevancia tanto en el plano conceptual como en el didáctico. Esta perspectiva permite comprender cómo los estudiantes transitan de procedimientos concretos a estructuras abstractas, facilitando una comprensión más profunda y flexible del conocimiento matemático.

Como herramienta didáctica, favorece el desarrollo de habilidades clave como la abstracción, la generalización y la reflexión. Se recomienda que futuras investigaciones aborden esta dualidad desde el uso de tecnologías digitales, como GeoGebra o Derive, para explorar nuevas formas de mediación conceptual en el aula desde enfoques teóricos diversos.

REFERENCIAS

Amador, J. M. (2022). Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(2), 163-189. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09483-z

Assemany, D.. (2024). Conexões Matemáticas Reveladas na Formação de Professores de Matemática. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 38, e230122. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230122

Báez, A. M., Martínez-López, Y., Pérez, O. L., & Pérez, R. (2017). Propuesta de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería. *Formación universitaria*, *10*(3), 93-106. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000300010

Báez, N., Blanco, R., Heredia, W. (2022). Los problemas de optimización en el cálculo diferencial de una variable. *Transformación*, *18*(2), 317-335. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S2077-29552022000200317&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Báez-Ureña, N., Pérez-González, O. L., & Blanco-Sánchez, R. (2018). Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje. *Academia Y Virtualidad*, *1*(1), 16–26. https://doi.org/10.18359/ravi.2885

Bueno, S., Burgos, M., Godino, J. y Pérez, O. (2022). Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *25*(2), 135-168. https://doi.org/10.12802/relime.22.2521

Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O., & Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Castro-Superfine, A., Prasad, P. V., Welder, R. M., Olanoff, D. y Eubanks-Turner, C. (2020). Exploring mathematical knowledge for teaching teachers: supporting prospective elementary teachers' relearning of mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, 17(2 y 3), 367-402. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol17/iss2/3/

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Faila, F., & Setiawan, B. (2025). Introducing Math Concepts At An Early Age: Collaborative Stimulation. *Journal Evaluation in Education (JEE)*, *6*(1), 261-267. https://doi.org/10.37251/jee.v6i1.1368

Gamboa, G. d., Badillo, E., Couso, D., & Márquez, C. (2021). Connecting Mathematics and Science in Primary School STEM Education: Modeling the Population Growth of Species. *Mathematics*, *9*(19), 2496. https://doi.org/10.3390/math9192496

Gamboa, G. G. d., Badillo, E. & Font, V. Meaning and Structure of Mathematical Connections in the Classroom. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. *23*, 241–261 (2023). https://doi.org/10.1007/s42330-023-00281-2

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(6), 912–936. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, *2*(2), 1–24. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116–140. https://doi.org/10.2307/749505

Gutiérrez, X. y Parraguez, M. (2021). Mecanismo mental de síntesis en el aprendizaje del triángulo de Sierpinski como totalidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(3), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2908

Hatisaru, V. (2023). Mathematical connections established in the teaching of functions. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *42*(3), 207–227. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac013

Hatisaru, V., Stacey, K., & Star, J. (2024). Mathematical connections in preservice secondary mathematics teachers' solution strategies to algebra problems. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *25*(25), 33–55. https://doi.org/10.35763/aiem25.6354

Litteck, K., Rolfes, T., & Heinze, A. (2024). The structure of knowledge about the concept of derivative – a study investigating a process-object framework. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2397990

Malheiros, A. (2024). O Movimento de Práxis na Constituição de uma Concepção de Modelagem em Educação Matemática. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 38, e240034. https://doi.org/10. 20241590/1980-4415v38a240034

Mateo, W., & Pérez, O. (2024). Formación conceptual y tecnologías digitales en el Cálculo Diferencial para Ingeniería. *Varona. Revista Científico Metodológica*, *79*. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1992-82382024000100025&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Pérez, O. (2020). La formación y desarrollo conceptual en el cálculo diferencial y el álgebra lineal en las carreras de ingeniería. *PARADIGMA*, 571-599. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p571-599.id849

Pino-Fan, L., Castro, W., & Font, V. (2023). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' *Practice*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(5), 1407-1432. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Quilantán, I., & Rodríguez, F. (2024). Narrativa de profesores universitarios sobre el concepto ecuación logística: análisis teórico en APOE. *RIME*, *1*(2), 113-127. https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023784

Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2364–2390. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Pino-Fan, L. R. (2023). Onto-semiotic analysis of one teacher's and university students' mathematical connections when problem-solving about launching projectile. *Journal on Mathematics Education*, 14(3), 563-584. http://doi.org/10.22342/jme.v14i3.pp563-584

Sanz-Ramos, S., Presentación-Muñoz, A., González-Fernández, A., Rodal, M., & Acevedo-Borrega, J. (2024). Video games are a useful didactic tool for learning history and mathematics: a systematic review. *Texto Livre*, 17, e52566. https://doi.org/10.1590/1983-3652.2024.52566

Sanz-Ramos, S., Presentación-Muñoz, A., González-Fernández, A., Rodal, M., & Acevedo-Borrega, J. (2024). Video games are a useful didactic tool for learning history and mathematics: a systematic review. *Texto Livre*, 17, e52566. https://doi.org/10.1590/1983-3652.2024.52566

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics*, 14(1), 44-55. https://www.jstor.org/stable/40248103

Shvarts, A., Bos, R., Portero, M. & Drijvers, P. (2024). Reifying actions into artifacts: process–object duality from an embodied perspective on mathematics learning. *Educ Stud Math*, *117*, 193–214 (2024). https://doi.org/10.1007/s10649-024-10310-y

Sitora, I; (2024). The importance of forming mathematical concepts. *Multidisciplinary Journal of Science and Technology*, *4*(3), 912-917. https://www.mjstjournal.com/index.php/mjst/article/view/1279

Van der Aalst, W. (2023). Object-Centric Process Mining: Unraveling the Fabric of Real Processes. *Mathematics*, *11*(12), 2691. https://doi.org/10.3390/math11122691

Financiación:

Proyecto código 2024-2-1D3-0812, del Fondo Nacional de Innovación y Desarrollo Científico y Tecnológico, República Dominicana.

Proyecto código PS221LH001-043, del Programa Sectorial del Ministerio de Educación, Cuba.

Proyecto código PS223LH 002-008, Programa Sectorial de la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, Cuba.

Conflictos de interés:

Los autores declaran no tener conflictos de interés.

Contribución de los autores:

Olga Lidia Pérez González, Aura Estela Pujols Baez, Ana Mercedes Báez y Rosario del Pilar Gibert Delgado: Conceptualización, curación de datos, análisis formal, investigación, metodología, supervisión, validación, visualización, redacción del borrador original y redacción, revisión y edición.